Lekcija 6: *Redukcija reda modela i LMI problem*

Prof.dr.sc. Jasmin Velagić
Elektrotehnički fakultet Sarajevo

Kolegij: Multivarijabilni sistemi

2012/2013

Redukcija reda modela

- U ovom dijelu se izučava:
  - **Opis metoda za reduciranje reda modela procesa ili regulator.**
  - **Poseban naglasak na modelima reduciranog reda dobivenih rezidualizacijom manje upravljivih i osmotrivih stanja balansirane realizacije.**
  - **Prikaz metoda balansiranog skraćivanja (balanced truncation) i optimalne Hankelove norme aproksimacije.**

Redukcija reda modela

- Metode sinteze modernih regulatora, kao što su H_∞ i LQG zahtijevaju da regulatori budu najmanje reda procesa, ili obično višeg zbog uključenih težina.
- Ovi upravljački zakoni mogu biti presloženi s obzirom na praktičnu implementaciju i zbog toga se traže jednostavniji postupci sinteze.
- Jedan od načina je reduciranje reda modela procesa prije sinteze regulatora, ili reduciranje regulatora u finalnom stanju, ili oboje.
- Centralni problem kojeg razmatramo glasi: Zadan je stabilni LTI model visokog reda $\boldsymbol{G}$, naći aproksimaciju niskog reda $\boldsymbol{G}_a$ takvu da je beskonačna norma (H_∞ ili L_∞) razlike $\left\|\boldsymbol{G}-\boldsymbol{G}_a\right\|_\infty$ malog iznosa.
- Pod redom modela podrazumijeva se dimenzija vektora stanja u minimalnoj realizacija.

Redukcija reda modela

- Zadan je minimalni prikaz modela u prostoru stanja ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$):

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x} \in \Re^n, \boldsymbol{u} \in \Re^m \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{y} \in \Re^l \end{aligned}}$$

ili kao ulazno-izlazni model:

$$\boldsymbol{Y}(s) = \underbrace{[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]}_{\boldsymbol{G}(s)}\boldsymbol{U}(s)$$

- **Redukcija modela**: Tražimo model

$$\dot{\boldsymbol{x}}_r(t) = \boldsymbol{A}_r\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}_r\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}_r \in \Re^k, \boldsymbol{u} \in \Re^m$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}_r\boldsymbol{x}_r(t) + \boldsymbol{D}_r\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{y} \in \Re^l$$

$$\boldsymbol{G}_a(S) = \boldsymbol{C}_r(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}_r + \boldsymbol{D}_r$$

Redukcija reda modela

- Za $k < n$ tražimo da je predikcijsko ulazno-izlazno ponašanje blisko nekom zadanom, kao npr. zahtjev da

$$\left\| \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_a \right\|_\infty$$

bude malog iznosa.

- Postavlja se pitanje zašto se radi redukcija modela?
- **Smanjenje računarske složenosti**
  - vrijeme za dinamičke simulacije je aproksimativno proporcionalno sa n^3,
  - posebno važno za aplikacije u stvarnom vremenu, npr. regulatore.

Redukcija reda modela

- **Metode sinteze regulatora obično daju regulatore čiji je red najmanje jednak redu modela procesa, obično značajno višeg reda. Da bi se postigao regulator nižeg reda potrebno je:**
  - reducirati red model s obzirom na dizajn upravljanja, ili
  - reducirati red regulatora nakon dizajna.
- Postoji mnogo metoda za redukciju modela.
- U ovom predavanju će se izložiti neke, najčešće korištene.

Skraćivanje i rezidualizacija

- Neka je $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ minimalna realizacija stabilnog sistema $\boldsymbol{G}(s)$ i neka je vektor $\boldsymbol{x}$ (dimenzije n) razložen na komponente $[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2]^T$, gdje vektor $\boldsymbol{x}_2$ posjeduje n-k stanja koje želimo ukloniti.
- Odgovarajućim rastavom $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{C}$, jednadžbe u prostoru stanja postaju:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_1 &= \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 &= \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{aligned}}$$

- Želimo postići model k-tog reda iz modela n-tog reda.
- Skraćivanje: postaviti $\boldsymbol{x}_2$ na nulu, tj. ukloniti ga.
- Rezidualizacija: postaviti $\dot{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{0}$, odnosno $\boldsymbol{x}_2$ postaje algebarska varijabla koja ovisi o $\boldsymbol{x}_1$ i $\boldsymbol{u}$.

Skraćivanje

- Skraćivanje k-tog reda realizacije $G \overset{S}{=} (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ dana je sa:

$$\boxed{\boldsymbol{G}_a \overset{S}{=} (\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{D})}$$

- Skraćeni model $\boldsymbol{G}_a$ jednak je $\boldsymbol{G}$-u na beskonačnoj frekvenciji, tj. $\boldsymbol{G}(\infty) = \boldsymbol{G}_a(\infty) = \boldsymbol{D}$.
- Jednostavno uklanjanje stanja ima malo smisla općenito.
- Zbog toga se prvo ide na transformiranje $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ u Jordanov oblik i postavljanje stanja tako da $\boldsymbol{x}_2$ korespondira sa najbržim modelima, tj. najvećim amplitudama svojstvenih vrijednosti.

Skraćivanje

- Zbog jednostavnosti pretpostavimo da se $\boldsymbol{A}$ može dijagonalizirati tako da je:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1^T \\ \boldsymbol{b}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n^T \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

- Ako su λ_i poredane u sljedećem poretku $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots$, tada su najbrži modovi uklonjeni iz modela nakon skraćivanja.
- U dijagonalnom Jordanovom obliku (različite svojstvene vrijednosti λ_i) $\boldsymbol{G}$ poprima oblik: $\boldsymbol{G}(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{c}_i \boldsymbol{b}_i^T}{s - \lambda_i}$

Skraćivanje

- Uklanjanje (brisanje) n-k najbržih modova tada daje model pogreške:

$$\boldsymbol{G}(s)-\boldsymbol{G}_a(s)=\sum_{i=k+1}^{n}\frac{\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{b}_i^T}{s-\lambda_i}$$

što povlači za sobom:

$$\left\|\boldsymbol{G}(s)-\boldsymbol{G}_a(s)\right\|_\infty \leq \sum_{i=k+1}^{n}\frac{\bar{\sigma}(\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{b}_i^T)}{\left|\mathrm{Re}(\lambda_i)\right|}$$

gdje moramo pretpostaviti stabilnu matricu $\boldsymbol{G}(s)$.

Skraćivanje

- Pogreška, odnosno H_∞ granica pogreške:

$$\boxed{\sum_{i=k+1}^{n} \frac{\boldsymbol{c}_i \boldsymbol{b}_i^T}{s-\lambda_i}}$$

ovisi ne samo o svojstvenim vrijednostima brzih modova λ_i, već i o rezidualima $\boldsymbol{c}_i \boldsymbol{b}_i^T$, tj. o efektu djelovanja ulaza $\boldsymbol{u}$ na $\boldsymbol{x}_2$ i efektu $\boldsymbol{x}_2$ na izlaze $\boldsymbol{y}$.

- Za $\omega = \infty$ imamo:

$$\boxed{\boldsymbol{G}_a(i\omega) = \boldsymbol{G}(i\omega) = \boldsymbol{D}}$$

odnosno, nema pogreške na beskonačnoj frekvenciji.

Rezidualizacija

- Kod rezidualizacije imamo $\dot{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{0}$ i (ukoliko je matrica $\boldsymbol{A}_{22}$ invertibilna):

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1(t) = (\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{x}_1(t) + (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = (\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{x}_1(t) + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{u}(t)$$

- Reducirani model ($\boldsymbol{A}_r$, $\boldsymbol{B}_r$, $\boldsymbol{C}_r$, $\boldsymbol{D}_r$) jednak je:

$$(\boldsymbol{A}_r, \boldsymbol{B}_r, \boldsymbol{C}_r, \boldsymbol{D}_r) =$$

$$= (\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}, \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}, \boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{B}_2)$$

- Ovaj reducirani model naziva se **rezidualizacija** od:

$$\boldsymbol{G} \overset{s}{=} (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$$

Rezidualizacija

- Obično se model $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ postavi u Jordanov oblik, sa svojstvenim vrijednostima poredanim tako da $\boldsymbol{x}_2$ sadrži najbrže modove.
- Na nultoj frekvenciji imamo:

$$\boxed{\boldsymbol{G}_a(0) = \boldsymbol{G}(0)}$$

što slijedi iz činjenice da je $\dot{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{0}$ u stacionarnom stanju.

- Iz navedenog o skraćivanju i rezidualizaciji slijedi:
  - Skraćivanje daje najbolju aproksimaciju na visokim frekvencijama.
  - Rezidualizacija daje najbolju aproksimaciju na niskim frekvencijama.

Rezidualizacija

- Suprotnosti između skraćivanja i rezidualizacije slijede iz bilinearne transformacije $s \rightarrow 1/s$ [Liu and Anderson, 1989].
- Obje metode mogu u principu generirarti prilično visoke iznose pogreški redukcije, jer ukupni efekt stanja na ulazno-izlazno ponašanje nije nužnu povezano s brzinom odziva.
- Trbaju biti kombinirane sa nekom metodom koja osigurava relativno mali ukupni efekt od uklanjanja stanja na ulazno-izlazno ponašanje $\Rightarrow$ uravnoteženje (balansiranje).

Balansirane realizacije

- **Balansirana realizacija je asimptotski stabilna minimalna realizacija u kojoj su Gramiani upravljivosti i osmotrivosti jednaki i dijagonalni.**

Gramian upravljivosti

- Model u prostoru stanja $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ ima impulsni odziv od $\boldsymbol{u}(t)$ do $\boldsymbol{x}(t)$ dan sa:

$$\boxed{\boldsymbol{X}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}}$$

- Kvantifikacija "veličine" impulsnog odziva:

$$\boxed{\boldsymbol{P}(t) = \int_0^t \boldsymbol{X}(\tau)\boldsymbol{X}^T(\tau)d\tau = \int_0^t e^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T e^{\boldsymbol{A}^T\tau} d\tau}$$

- **Gramian upravljivosti** $\boldsymbol{P}$ definira se kao: $\boldsymbol{P} = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}(t)$

Balansirane realizacije

- Gramian upravljivosti može se izračunati iz Lyapunovljeve jednadžbe:

$$\boldsymbol{AP} + \boldsymbol{PA}^T + \boldsymbol{BB}^T = \boldsymbol{0}$$

- $\boldsymbol{P}$ je kvantitativna mjera upravljivosti različitih stanja, esencijalno, mjerenje efekta ulaza na različita stanja.

Gramian osmotrivost

- Model u prostoru stanja ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$) sa ulazom $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0}$ i inicijalnim stanjem $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{x}^*$ ima izlaz:

$$\boxed{\boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}^*}$$

- Energija izlaza je: $$\boxed{\int_0^t \boldsymbol{y}^T(\tau)\boldsymbol{y}(\tau)d\tau = \boldsymbol{x}^{*T} \underbrace{\int_0^t e^{\boldsymbol{A}^T\tau}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}\tau}d\tau}_{\boldsymbol{Q}(t)} \boldsymbol{x}^*}$$

Balansirane realizacije

- Gramian osmotrivosti $\boldsymbol{Q}$ definira se kao:

$$\boxed{\boldsymbol{Q} = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{\boldsymbol{A}^T \tau} \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{C} e^{\boldsymbol{A}\tau} d\tau}$$

- Gramian osmotrivosti može se izračunati iz Lyapunovljeve jednadžbe:

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$$

- $\boldsymbol{Q}$ je kvantitativna mjera osmotrivosti različitih stanja, esencijalno, mjerenje efekta stanja na izlaze.

Balansirane realizacije

- Neka je ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$) minimalna realizacija stabilne, racionalne funkcije prijenosa $\boldsymbol{G}(s)$, tada ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$) je balansirana ako su rješenja sljedećih Lyapunovljevih jednadžbi:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{AP} + \boldsymbol{PA}^T + \boldsymbol{BB}^T &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{QA} + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}}$$

$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = \boldsymbol{\Sigma}$, gdje je $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_n \geq 0$.

- $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}$ su Gramiani upravljivost i osmotrivosti:

$$\boxed{\boldsymbol{P} \overset{\Delta}{=} \int_0^\infty e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{BB}^T e^{\boldsymbol{A}^T t} dt, \ \boldsymbol{Q} \overset{\Delta}{=} \int_0^\infty e^{\boldsymbol{A}^T t}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t} dt}$$

Balansirane realizacije

- U gornjim izrazima $\boldsymbol{\Sigma}$ predstavlja Gramian od $\boldsymbol{G}(s)$, gdje σ_i predstavljaju poredane **Hankelove singularne vrijednosti** od $\boldsymbol{G}(s)$, definirane kao:

$$\boxed{\sigma_i \overset{\Delta}{=} \sqrt{\lambda_i(\boldsymbol{PQ})},\ i = 1,\ldots,n}$$

  gdje se:

$$\boxed{\sigma_1 = \|\boldsymbol{G}\|_H}$$

  naziva **Hankelovom normom** od $\boldsymbol{G}(s)$.
- Svako stanje u balansiranoj realizaciji je osmotrivo, ukoliko je upravljivo, pri čemu je σ_i mjera koliko je sistem osmotriv, odnosno upravljiv.
- Stanje sa relativno malim iznosom σ_i ima relativno mali efekt na ulazno-izlazno ponašanje i slijedi da se može ukloniti bez značajnijih negativnih posljedica.

Balansirano skraćivanje i rezidualizacija

- Neka je ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$) minimalna realizacija od $\boldsymbol{G}(s)$ sa podjelom:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Sigma}_1 \end{bmatrix}$$

gdje $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ i $\boldsymbol{\Sigma}_2 = \mathrm{diag}(\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n)$

- Balansirano skraćivanje ili rezidualizacija zadržavaju k stanja koji korespondiraju sa $\boldsymbol{\Sigma}_1$, tako da će u oba slučaja imati pogrešku redukcije modela:

$$\left\| \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_a^k \right\|_\infty \leq 2 \sum_{i=k+1}^{n} \sigma_i$$

Balansirano skraćivanje i rezidualizacija

- Reducirani model $(\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{D})$ naziva se **balansirano skraćivanje** od $\boldsymbol{G}(s)$.
- Ideja balansiranja sistema sistema i zatim odbacivanje stanja korespondira sa malim Hankelovim singularnim vrijednostima.
- U balansiranom skraćivanju odbacuje se najmanje upravljivih i osmotrivih stanja koji korespondiraju sa $\boldsymbol{\Sigma}_2$.
- U **balansiranoj rezidualizaciji**, jednostavno postavljamo na nulu sve derivacije ovih stanja.
- Rezultat balansirane rezidualizacije od $\boldsymbol{G}(s)$ je $(\boldsymbol{A}_r, \boldsymbol{B}_r, \boldsymbol{C}_r, \boldsymbol{D}_r)$, tj.

$$(\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}, \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}, \boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{B}_2)$$

Optimalna Hankelova norma aproksimacije

- U ovom pristupu redukcije modela pretpostavlja se stabilan model $\boldsymbol{G}(s)$ reda n, a zadatak je pronaći reducirani model $\boldsymbol{G}_h^k(s)$ reda k takav da se Hankelova norma pogreške aproksimacije $\left\|\boldsymbol{G}(s)-\boldsymbol{G}_h^k(s)\right\|_H$ minimizira.
- **Hankelova norma** bilo koje stabilne funkcije prijenosa $\boldsymbol{E}(s)$ definirana je kao:

$$\boxed{\left\|\boldsymbol{E}(s)\right\|_H = \sigma_1 \overset{\Delta}{=} \sqrt{\rho(\boldsymbol{PQ})}}$$

tj, jednaka je maksimumu Hankelove singularne vrijednosti od $\boldsymbol{E}(s)$.

Optimalna Hankelova norma aproksimacije

- Optimalna Hankelova norma aproksimacija nastoji minimizirati $\left\| \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_a^k \right\|_H$ za dani red k modela reduciranog reda.
- Za stabilnu kvadratnu funkciju prijenosa $\boldsymbol{G}(s)$, optimalna Hankelova norma aproksimacije k-tog reda može se direktno izračunati i Hankelova norma pogreške:

$$\boxed{\left\| \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_a^k \right\|_H = \sigma_{k+1}}$$

- Optimalna Hankelova norma je neovisna o matrici $\boldsymbol{D}$ od $\boldsymbol{G}_a^k$.
- Minimum ∞-norme pogreške je:

$$\boxed{\min_{\boldsymbol{D}} \left\| \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_a^k \right\|_\infty \leq \sum_{i=k+1}^{n} \sigma_i}$$

Redukcija nestabilnih modela

- Balansirano skraćivanje i rezidualizaciji i optimalna Hankelova norma aproksimacija primjenjuju se direktno za stabilne funkcije prijenosa $\boldsymbol{G}(s)$.
- U slučaju nestabilnih modela može se postupiti na sljedeće načine:
  - Odvojiti nestabilni dio modela prije obavljanja redukcije stabilnog dijela modela:

$$\boxed{\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{G}_u(s) + \boldsymbol{G}_s(s)}$$

i zatim koristiti neki od navedenih metoda za određivanje aproksimacije reduciranog reda $\boldsymbol{G}_{sa}(s)$

$$\boxed{\boldsymbol{G}_a(s) = \boldsymbol{G}_u(s) + \boldsymbol{G}_{sa}(s)}$$

Redukcija nestabilnih modela

- Korištenje koprim faktorizacija od $\boldsymbol{G}(s)$:

$$\boxed{\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{M}^{-1}(s)\boldsymbol{N}(s)}$$

sa stabilnim $\boldsymbol{M}(s)$ i $\boldsymbol{N}(s)$.

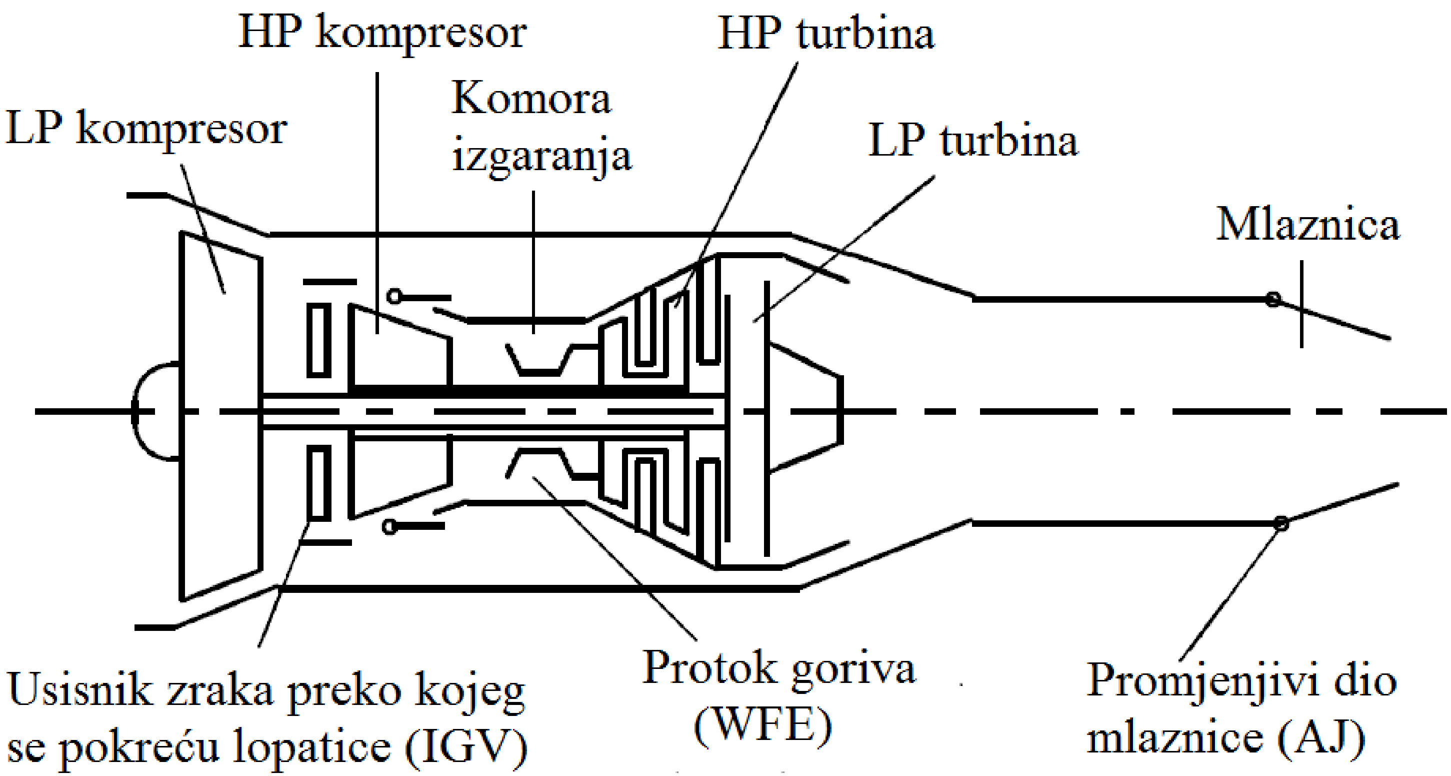
Nakon toga se primjenjuje redukcije modela na $[\boldsymbol{M}(s)\ \ \boldsymbol{N}(s)]$ i koristi:

$$\boxed{\boldsymbol{G}_a(s) = \boldsymbol{M}_a^{-1}(s)\boldsymbol{N}_a(s)}$$

Primjer redukcije reda modela procesa

Redukcija modela turbo mlaznog aviona

- Model motora ima 3 ulaza, 3 izlaza i 15 stanja.



Primjer redukcije reda modela procesa

- Ulazi u motor su: protok goriva, varijabilno područje mlaznice i promjenjivi ugao zakreta lopatica pokretanih preko usisnika zraka.
- Izlazi koji se upravljaju su: brzina osovine kompresora visokog tlaka (HP, središnji kompresor), omjer izlaznog tlaka (sa kompresora visokog tlaka) i tlaka na ulazu motora i izlaz kompresora niskog tlaka.
- Kompresor niskog tlaka (LP) je ustvari ventilator.
- Osnovno načelo rada mlaznih motora je da se zrak dovodi pod tlakom u komore izgaranja, gdje se mješa sa gorivom te se izgaranjem stvara još veći tlak koji tjera plinove iz komore izgaranja velikom brzinom kroz mlaznicu stvarajući time potisak.

Primjer redukcije reda modela procesa

- Kod mlaznih motora sa turbinom, zrak ulazi u rotirajući kompresor kroz usisnik zraka.
- U kompresoru se zrak komprimira prije ulaska u komore izgaranja gdje se pod tlakom miješa s gorivom.
- Proces izgaranja dovodi do velikog porasta temperature te vrući plinovi stvoreni gorenjem velikom brzinom prolaze kroz turbinu i okreću je, zatim kroz ispušnu cijev izlaze iz motora.
- Turbina pogoni kompresor s kojim je spojena preko osovine.
- Efikasnost mlaznog motora najviše ovisi o omjeru ulaznog tlaka u kompresor i komprimiranog zraka prije ulaska u komore izgaranja te ulazne temperature na turbinu.

Primjer redukcije reda modela procesa

- Hankelove singularne vrijednosti za modela sa 15 stanja su:

1) 2.000528e+001, 2) 4.046418e+000, 3) 2.754623e+000

4) 1.763527e+000, 5) 1.296531e+000, 6) 6.296397e-001

7) 1.668864e-001, 8) 9.340749e-002, 9) 2.219277e-002

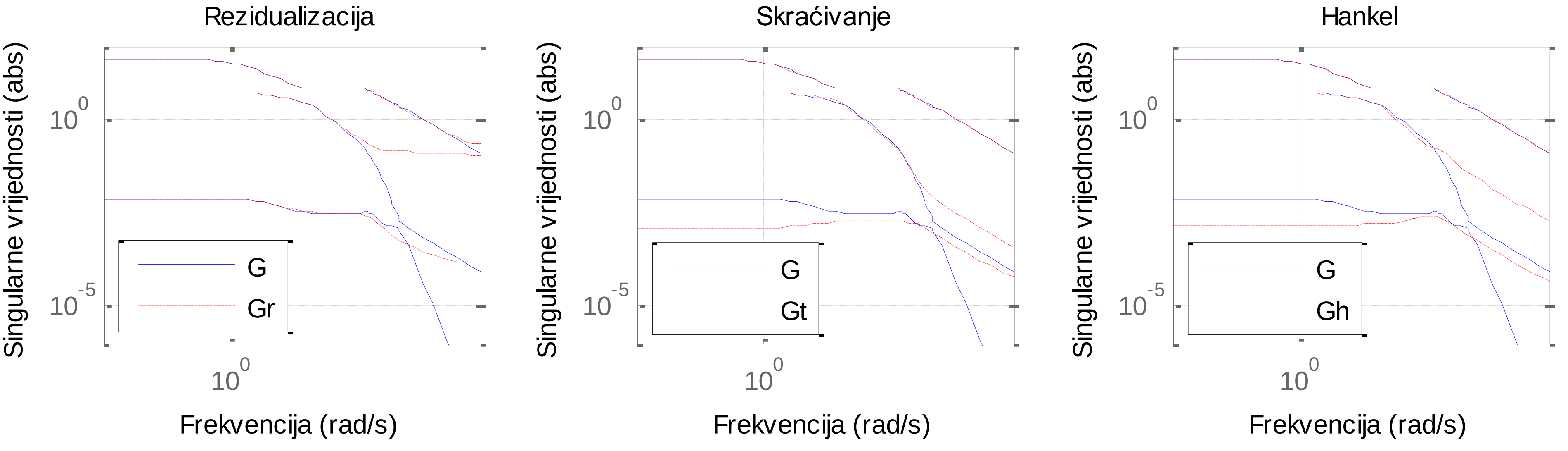
10) 1.566868e-002, 11) 1.362056e-002,12) 3.996689e-003

13) 1.178913e-003, 14) 3.241000e-004, 15) 3.307337e-005

- Granice L_∞ norme pogreške za rezidualizaciju i skraćivanje su izražene preko dvostruke sume sa slajda 20., a za optimalnu Hankelovu normu aproksimacije jednostrukom sumom sa slajda 23.
- Model sa 15 stanja želimo reducirati na model sa 6 stanja (ukloniti zadnjih 7 stanja).

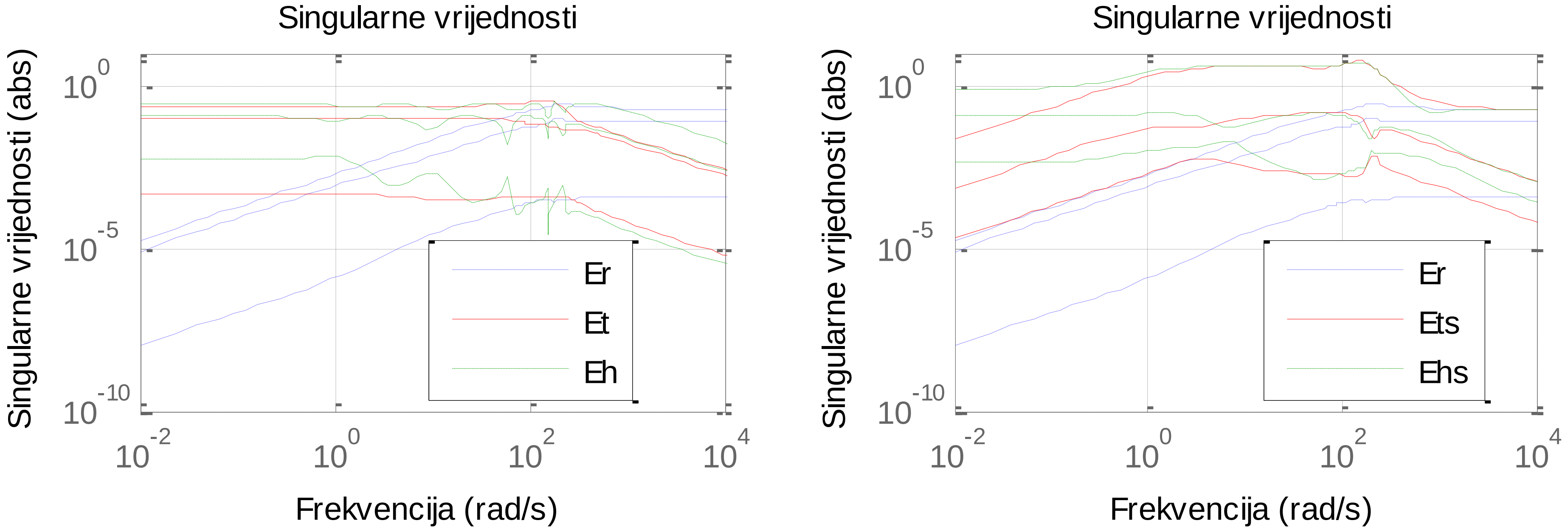
Primjer redukcije reda modela procesa

- Singularne vrijednosti (ne Hankelove singularne vrijednosti) reduciranih i modela punog reda za slučajeve balansirane rezidualizacije, balansiranog skraćivanja i optimalne Hankelove norme aproksimacije prikazane su na slikama ispod (za sva tri izlaza).
- Punom linijom su prikazane singularne vrijednosti za puni red, a isprekidanom za reducirani red modela.
- Rezidualizirani sistem ima perfektno slganje sa sistemom punog reda u stacionarnom stanju.



Primjer redukcije reda modela procesa

- Singularne vrijednosti pogreške redukcije sistema ($\boldsymbol{G}$ - $\boldsymbol{G}_a$) za svaku od tri aproksimacije prikazane su na sljedećoj slici.
- Oznake pogrešaka su: E_r (balansirana rezidualizacija), E_t (balanirano skraćivanje), E_h (optimalna Hankelova norma aproksimacije).



(a) (b)

Singularne vrijednosti za skalirane (b) i neskalirane (b) pogreške sistema.

Primjer redukcije reda modela procesa

- Beskonačna norma pogreške redukcije modela sistema za balansiranu rezidualizaciju iznosi 0.295 i događa se na 208 rad/s, dok za balansirano skraćivanje i optimalnu Hankelovu normu aproksimacije iznosi 0.324 (na 169 rad/s) i 0.179 (na 248 rad/s).
- Gornje granice za norme pogreške redukcije modela iznose 0.635 (dvostruka suma sa slajda 20.) za rezidualizaciju i skraćivanje, dok za optimalnu Hankelovu normu aproksimacije iznosi 0.187 (suma sa slajda 23.).
- Može se reći da je za ovaj proces poželjno da ima propusni opseg zatvorenog sistema oko 10 rad/s.
- Oko ove frekvencije pogreška redukcije modela će imati malu vrijednost za dobar regulator.

Primjer redukcije reda modela procesa

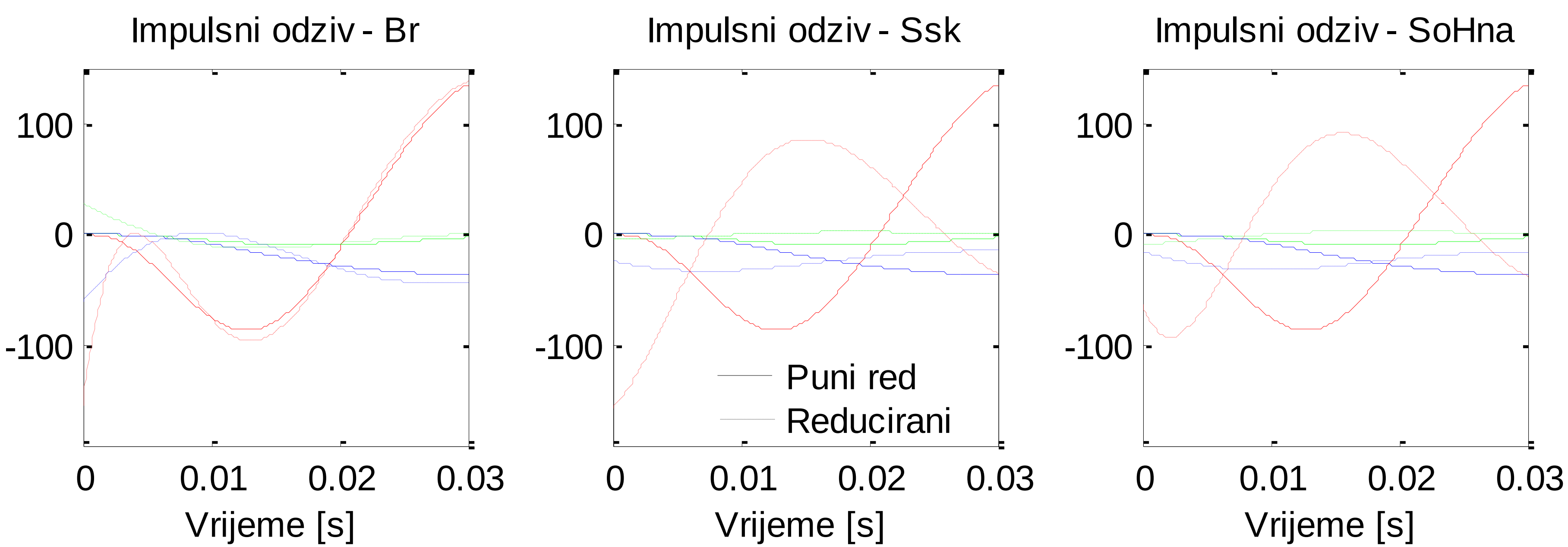
- Ponekad je poželjno imati pojačanje u stacionarnom stanju jednako kao u slučaju modela punog reda (primjer: otvoreni sistem upravljanja).
- Na prethodnoj slici za balansirano skraćivanje i optimalnu Hankelovu normu aproksimacije to nije slučaj., pogotovo za skalirane pogreške.
- U skaliranom slučaju aproksimacija modela $\boldsymbol{G}_a$ je zamijenjena sa $\boldsymbol{G}_a \boldsymbol{W}_s$, gdje je $\boldsymbol{W}_s = \boldsymbol{G}_a(0)^{-1}\boldsymbol{G}(0)$.
- Kod skaliranih sistema beskonačna norma pogreška $\left\| \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_a \boldsymbol{W}_s \right\|_\infty$ poprima prilično velike vrijednosti.
- Što se tiče rezidualiziranih sistema, oni ne trebaju skaliranje.

Primjer redukcije reda modela procesa

- Beskonačne norme u slučajevima skaliranog balansiranog skraćivanja i skalirane optimalne Hankelove norme su respektivno degradirane na 5.71 (na frekvenciji 151 rad/s) i 2.61 (na frekvenciji 168.5 rad/s).
- Prema tome, skalirani sistemi u slučajevima balansiranog skraćivanja i optimalne Hankelove norme aproksimacije su lošiji u odnosu na neskalirane, budući da kritično frekvencijsko područje oko frekvencije presjeka postaje veliko uprkos poboljšanjima u stacionarnom stanju.
- Zbog toga se rezidualizacija preferira kada se zahtijeva dobro slaganje na niskim frekvencijama.

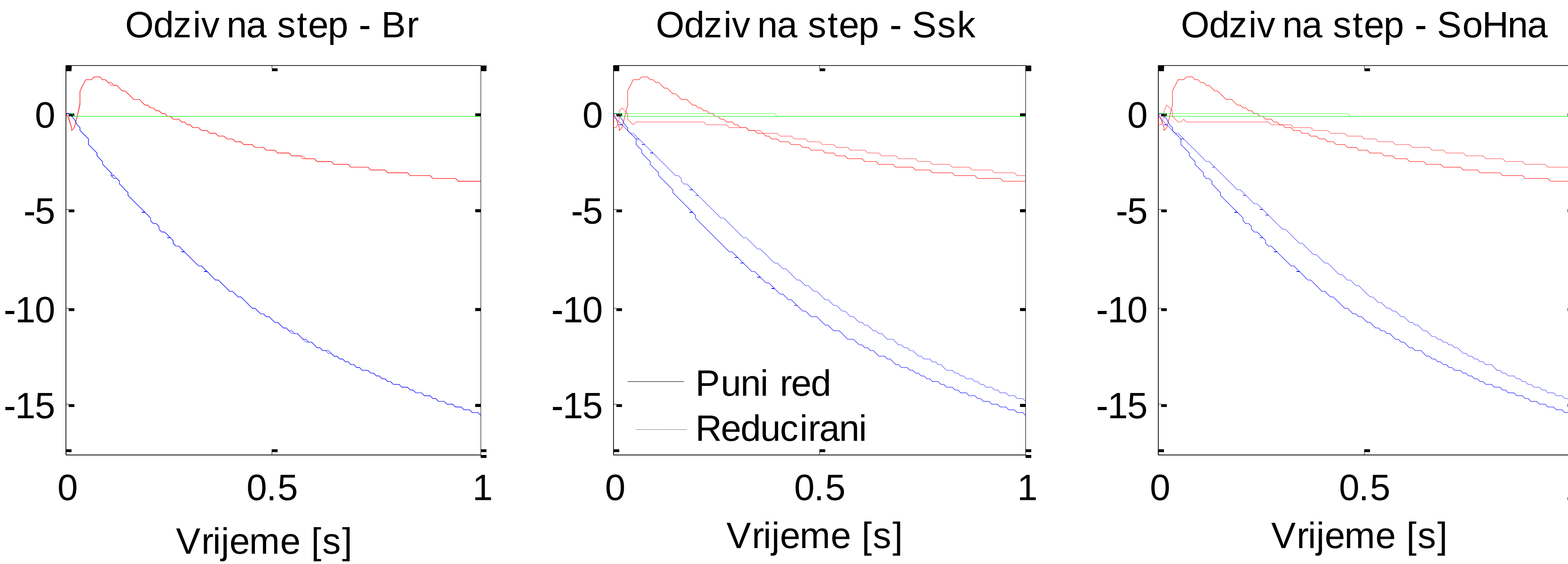
Primjer redukcije reda modela procesa

- Impulsni odzivi i odzivi sva na skokovite pobude za sva tri izlaza u odnosu na drugi ulaz prikazani su na sljedećim slikama, za sve tri vrste redukcije (Br – balansirana rezidualizacija, Ssk – skalirano balansirano skraćivanje, SoHna – skalirana optimalna Hankelova norma aproksimacije).



Primjer redukcije reda modela procesa

- Slični rezultati se dobiju i za odzive kada su pobude dovedene na prvi i treći ulaz.



- Sa odziva se može zaključiti da je reducirani model u slučaju balansirane rezidualizacije najbliži modelu punog reda.
- Osim redukcije reda modela procesa može se načiniti i redukcija reda regulatora.

LMI problem

- **LMI** (Linear Matrix Inequality) – klasa numeričkih problema optimiranja.
- **Definicija 1.** LMI je matrična nejednadžba oblika:

$$\boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{F}_0 + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{F}_i > \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

gdje su zadani:

  - $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_m]$ realan vektor (varijabla)
  - $\boldsymbol{F}_i$, $i = 0, \ldots, m$, realne simetrične matrice.

- LMI nameće konveksno ograničenje na $\boldsymbol{x}$:
  - **problem izvodivosti**: naći $\boldsymbol{x}$ koji zadovoljava LMI,
  - **problem optimiranja**: naći $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ kao predmet LMI-a.

LMI problem

- Problem izvodivosti – naći $\boldsymbol{x}^{\text{izvod}}$ takav da je $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{\text{izvod}}) > \mathbf{0}$ ili odrediti da je LMI neizvodiv $\Rightarrow$ konveksni problem izvodivosti.
- Najčešće su u LMI-u varijable matrice, npr. kod Lyapunovljeve nejednadžbe:

$$\boxed{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P} < \mathbf{0}} \qquad (**)$$

gdje je matrica $\boldsymbol{A}$ zadana i $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T$ je varijabla.

- Ako se uzme $\boldsymbol{F}_0 = \mathbf{0}$ i

$$\boxed{\boldsymbol{F}_i = -\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A} + \boldsymbol{P}_i}$$

tada su nejednadžbe (*) i (**) ekvivalentne.

LMI problem

- Promatrajmo LTI sistem:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)}$$

- Ovaj sistem je globalno asimptotski stabilan (tj. sve trajektorije konvergiraju ka 0) ako za Lyapunovljevu funkciju $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ ($\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$) vrijedi:

$$\boxed{\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T > \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} < \boldsymbol{0}}$$

  gdje je $\boldsymbol{P}$ pozitivno definitna matrica.

- **Ovo korespondira sa LMI problemom izvodivosti, gdje je potrebno pronaći *P* da vrijede navedene nejednadžbe**.

LMI problem

- Deriviranjem funkcije V po vremenu t dobiva se:

$$\frac{dV(\boldsymbol{x})}{dt} = \dot{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}$$

$$= \boldsymbol{x}^T (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} < \boldsymbol{0}, \ \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} < \boldsymbol{0}$$

- Zadnji izraz predstavlja LMI, gdje je matrica $\boldsymbol{P}$ varijabla.
- Navedeno spada u domen **problema linearne stabilnosti**.

LMI problem

Poblem robusne linearne stabilnosti

- Promatrajmo politopski LTV (linearni vremenski promjenjiv) sistem:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{A}(t) \in \mathbf{Co}\{\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_L\}}$$

gdje je **Co** konveksni omotač (konvex hull) koji predstavlja konveksnu kombinaciju $\boldsymbol{A}_i$-ova.

- Funkcija Lyapunova postoji ako je:

$$\boxed{\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T > \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_i < \mathbf{0}, \quad i = 1, \ldots, L}$$

- Ovo također predstavlja LMI problem izvodivosti.

LMI problem

Problem optimiranja: H_∞ norma

- Promatrajmo LTI sistem

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{w}(t)$$
$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{w}(t)$$

- H_∞ norma od $\boldsymbol{G}_{yw}$ je ekvivalentna rješavanju problema minimiziranja po γ sljedeće nejednadžbe:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}^T \\ \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} & -\gamma\boldsymbol{I} & \boldsymbol{D}^T \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & -\gamma\boldsymbol{I} \end{bmatrix} < \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{P} > \boldsymbol{0}$$

tj. **minimizacija je predmet LMI-a**.

LMI problem

- Računanje gornje granice za strukturiranu singularnu vrijednost μ (**kod sinteze robusnog regulatora**):

$$\boxed{\min_{D} \bar{\sigma}(DND^{-1})}$$

  je također problem optimiranja sa LMI ograničenjem.

- Rješenja Riccatijevih jednadžbi, npr. u H_∞ optimalnom upravljanju, mogu se dobiti preko LMI problema izvodivosti.
- Mnogi problemi optimalnog i robusnog upravljanja mogu se promatrati kao LMI problemi $\Rightarrow$ problemi konveksne optimizacije za koje postoje efikasni algoritmi (npr. IPM (interior point methods))

LMI problem

Primjer 1. Promatrajmo:

$$\boldsymbol{F}(x)=\begin{bmatrix} x_1+x_2 & x_2+1 \\ x_2+1 & x_3 \end{bmatrix}\geq \mathbf{0}$$

gdje je:

$$\boldsymbol{F}_0(x)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}_1(x)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}_2(x)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}_3(x)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- LMI F(x)≥0 je ekvivalentno sa:

$$x_1+x_2\geq 0,\qquad x_3\geq 0$$

Skup linearnih nejednadžbi po *x*-u.

$$(x_1+x_2)x_1-(x_2+1)^2=x_1x_3+x_2x_3-x_2^2-2x_2-1\geq 0$$

LMI problem

Primjer 2. Koristiti Lyapunovljevu kvadratnu funkciju $V(z)=\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$ za dokaz stabilnost sistema:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \quad \left\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right\| \le \gamma \left\|\boldsymbol{x}\right\|$$

- Trebamo $\boldsymbol{P} > \boldsymbol{0}$ i $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \le -\alpha V(\boldsymbol{x})$ za sve x ($\alpha > 0$ zadano)

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\boldsymbol{x}) + \alpha V(\boldsymbol{x}) &= 2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) + \alpha \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \\
&= \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{P})\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{z} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{P} & \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

gdje je $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$.

LMI problem

- $\boldsymbol{z}$ zadovoljava $\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{z} \le \gamma^2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$ tako da trebamo $\boldsymbol{P} > \boldsymbol{0}$ i

$$-\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{P} & \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} \ge 0$$

kad god je: $$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} \ge \boldsymbol{0}$$

- Korištenjem *S*-procedure ovo se događa ako i samo ako je:

$$-\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{P} & \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \ge \tau \begin{bmatrix} \gamma^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$

za neki $\tau \ge 0$.

LMI problem

S-procedura

- Neka su $\boldsymbol{T}_0, \ldots, \boldsymbol{T}_p$ simetrične matrice. Ako postoje $\tau_1 \geq 0, \ldots, \tau_p \geq 0$ za koje je:

$$\boxed{\boldsymbol{T}_0 - \sum_{i=1}^{p} \tau_i \boldsymbol{T}_i > \boldsymbol{0}}$$

tada je:

$$\boxed{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{T}_0 \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}$$

takav da je:

$$\boxed{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{T}_i \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad i = 1, \ldots, p}$$

LMI problem

- Potrebni i dovoljni uvjeti postojanja kvadratne Lyapunovljeve funkcije mogu se iskazati kao LMI:

$$\boldsymbol{P} > \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{P} + \tau\gamma^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P} & -\tau\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}$$

  u varijablama $\boldsymbol{P}$ i τ (uvjet $\tau \geq 0$ slijedi automatski iz 2,2 bloka).

- Sa homogenošću ovo možemo pisati kao:

$$\boldsymbol{P} \geq \boldsymbol{I}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{P} + \tau\gamma^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P} & -\tau\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}$$

- Rješavanje LMI-a da bi se pronašao $\boldsymbol{P}$ predstavlja zahtjevnu metodu.
- Dobro je npr. riješiti Lyapunovljevu jednadžbu $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\mathbf{0}$ nadajući se da rezultantna $\boldsymbol{P}$ odgovara.

LMI problem

- **Definicija 2.** Sistem linearnih matričnih nejednadžbi predstavlja konačan skup linearnih matričnih nejednadžbi:

$$\boxed{\boldsymbol{F}_1(x) > \mathbf{0}, \ldots, \boldsymbol{F}_k(x) > \mathbf{0}}$$

koje su zadovoljene ako i samo ako je:

$$\boxed{\boldsymbol{F}(x) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{F}_2(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{F}_k(x) \end{bmatrix} > \mathbf{0}}$$

LMI problem

- Veoma važno svojstvo LMI-a dobiva se iz jednostavne algebarske observacije, koje je korisno u konvertiranju nelinearnih u linearne nejednadžbe.
- Pretpostavimo da se matrica $\boldsymbol{M} \in \Re^{n\times n}$ može rastaviti u obliku:

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} \\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22} \end{bmatrix}$$

  gdje je $\boldsymbol{M}_{11}$ dimenzija $(r \times r)$.
- Pretpostavimo da je $\boldsymbol{M}_{11}$ nesingularna matrica.
- Matrica $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{M}_{22} - \boldsymbol{M}_{21}\boldsymbol{M}_{11}^{-1}\boldsymbol{M}_{12}$ naziva se **Schurov komplement** od $\boldsymbol{M}_{11}$ u $\boldsymbol{M}$.

LMI problem

- Ako je $\boldsymbol{M}$ simetrična matrica tada imamo da:

$$\boldsymbol{M} > \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{S} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{M}_{11} > \mathbf{0} \\ \boldsymbol{S} > \mathbf{0} \end{cases}$$

- Rezultat je dobiven observacijom da je $\boldsymbol{M} > \mathbf{0}$ ako i samo ako $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{u} > 0$ za sve ne-nulte $\boldsymbol{u} \in \Re^n$.
- Neka je $\boldsymbol{F} \in \Re^{r\times(n\text{-}r)}$, tada $\boldsymbol{M} > \mathbf{0}$ ako i samo ako za sve $\boldsymbol{u}_1 \in \Re^r$ i $\boldsymbol{u}_2 \in \Re^{n-r}$ vrijedi:

$$\mathbf{0} < \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{F}\boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} \\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{F}\boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix}$$

LMI problem

- Sređivanjem se dobiva:

$$0 < \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{F}\boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} \\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{F}\boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{11}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{M}_{12} \\ \boldsymbol{M}_{21} + \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{22} + \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{M}_{11}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{M}_{12} + \boldsymbol{M}_{21}\boldsymbol{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix}$$

- Rezultat slijedi ako se uzme:

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{M}_{11}^{-1}\boldsymbol{M}_{12}$$

- Trenutna posljedica ove observacije je sljedeća propozicija.

LMI problem

- **Propozicija 1**. (**Schurov komplement**). Neka je $\boldsymbol{F}$ afina funkcija sa sljedećom podjelom (rastav):

$$\boldsymbol{F}(x) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{11}(x) & \boldsymbol{F}_{12}(x) \\ \boldsymbol{F}_{21}(x) & \boldsymbol{F}_{22}(x) \end{bmatrix}$$

gdje je $\boldsymbol{F}_{11}(x)$ simetrična matrica, tada je $\boldsymbol{F}(x) > \mathbf{0}$ ako i samo ako je:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{11}(x) > \mathbf{0} \\ \boldsymbol{F}_{22}(x) - \boldsymbol{F}_{12}(x)\boldsymbol{F}_{11}^{-1}(x)\boldsymbol{F}_{21}(x) > \mathbf{0} \end{cases}$$

- Druga nejednadžba je nelinearna matrična nejednadžba po x-u $\Rightarrow$ ove nelinearne matrične nejedneažbe mogu se transformirati u linearne matrične nejednadžbe.

LMI problem

- **Primjer 3**. Određivanje dijagonalne matrice $\boldsymbol{D}$ kod μ-analize, takve da je:

$$\boxed{\left\|\boldsymbol{DMD}^{-1}\right\| < 1}$$

gdje je $\boldsymbol{M}$ zadana matrica.

- Na temelju prethodnog izraza dobiva se:

$$\left\|\boldsymbol{DMD}^{-1}\right\| < 1 \;\Leftrightarrow \boldsymbol{D}^{-T}\boldsymbol{M}^{T}\boldsymbol{D}^{T}\boldsymbol{DMD}^{-1} < \boldsymbol{I}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{M}^{T}\boldsymbol{D}^{T}\boldsymbol{DM} < \boldsymbol{D}^{T}\boldsymbol{D}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}^{T}\boldsymbol{XM} > \boldsymbol{0}$$

gdje se iz $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{D}^{T}\boldsymbol{D} > \boldsymbol{0}$ zaključuje da je postojanje takve matrice LMI problem izvodivosti.

LMI problem

- **Primjer 4. Algebarska Riccatijeva nejednadžba.**
- Nalazi veliku primjenu u optimalnom upravljanju, gdje se sinteza optimalnih regulatora obavlja na temelju računanja pozitivno definitne simetrične matrice $\boldsymbol{P}$ koja zadovoljava Riccatijevu nejednadžbu:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T+\boldsymbol{Q}<\boldsymbol{0}$$

  gdje su $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ konstantne matrice, $\boldsymbol{Q}$ je konstantna simetrična matrica i $\boldsymbol{R}$ je konstantna simetrična pozitivno definitna matrica.

- Riccatijeva nejednadžba je kvadratna u $\boldsymbol{P}$-u, ali se može izraziti kao LMI primjenom Schurovog komplementa:

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix} > \boldsymbol{0}$$

LMI problem

Lur'e-Lyapunovljeva funkcija

- Problem analize stabilnosti sistema upravljanja sa nelinearnim aktuatorima [Lur'e & Postnikov], odnosno stabilnosti linearnih sistema sa nelinearnim perturbacijama.
- Promatra se vremenski diskretan sistem sa restriktiranom statičkom nelinearnosti:

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\phi(\boldsymbol{q}(k)) \\ \boldsymbol{q}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)\end{aligned}}$$

gdje je nelinearnost opisana sa:

$$\phi_i(q_i(k))[\phi_i(q_i(k)) - q_i(k)] \le 0, \quad \mathrm{za}\; i = 1,\dots,m \qquad (***)$$

i restrikcijama na nagib funkcije:

$$0 < \frac{\phi_i(q_i(k+1)) - \phi_i(q_i(k))}{q_i(k+1) - q_i(k)} < T_{ii}, \quad \mathrm{za}\; i = 1,\dots,m \qquad (****)$$

LMI problem

- T_{ii} je maksimalan nagib i-te nelinearnosti.
- Ovaj oblik se može koristiti za predstavljanje linearnog procesa, sa nelinearnim aktuatorom, koji je upravljan antiwindup kompenzatorom (antiwindup – postoji interakcija između nelinearnosti oblika zasičenja i integralnog djelovanja)).
- Lur'e-Lyapunovljeva funkcija je definirana kao:

$$\boxed{V(\boldsymbol{x}(k)) = \boldsymbol{x}^T(k)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(k) + 2\sum_{i=1}^{m}\int_0^{q_i(k)} \phi_i(\sigma)\boldsymbol{Q}_{ii}d\sigma}$$

  gdje je $\boldsymbol{P}$ pozitivno definitna i $\boldsymbol{Q}_{ii}$ nenegativna matrica, tako da je funkcija Lyapunova pozitivno definitna.
- Drugi izraz je uveo Lur'e, kojim se eksplicitno opisuje nelinearnost u Lyapunovljevoj funkciji.

LMI problem

- Lyapunovljeva metoda za vremenski diskretne sisteme zasniva se na razlici:

$$\boxed{V(\boldsymbol{x}(k+1)) - V(\boldsymbol{x}(k))}$$

- Ukupni sistem je globalno asimptotski stabilan ako se matrice $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{Q}_{ii}$ mogu izračunati tako da je navedena razlika manja od nule.
- Nelinearnosti su ograničene korištenjem izraza (****) i teorema srednje vrijednosti, pri čemu se *S*-procedura koristi za konvertiranje razlike funkcija Lyapunova, uključene u (***), u LMI.

LMI problem

- Može se pokazati, za vremenski diskretni sistem sa ograničenjima (***) i (****), da je dovoljan uvjet za globalnu asimptotsku stabilnost postojanje pozitivno definitne matrice $\boldsymbol{P}$ i dijagonalnih pozitivno semidefinitnih matrica $\boldsymbol{Q}$ i $\boldsymbol{R}$ takvih da je:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} \\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22} \end{bmatrix} > \boldsymbol{0}}$$

gdje su:

$$\boldsymbol{M}_{11} = -\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{P} - (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$$

$$\boldsymbol{M}_{12} = -\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{M}_{21} = -\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) - \boldsymbol{R}\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{M}_{22} = -\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q} + 2\boldsymbol{R}$$

LMI problem

- U prethodnim izrazima je matrica $\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}\{T_{ii}\}$.
- Nova matrica $\boldsymbol{R}$ je uvedena pomoću *S*-procedure.
- Navedeni problem je LMI problem izvodivosti koji se koristi za analizu pH neutralizacijskih procesa i kristalizacijskih procesa unutar nelinearni, zatvorenih sistema upravljanja.
- *S*-procedura omogućuje da se ne-LMI uvjeti, koji se pojavljuju u analizi nelinearnih sistema, mogu predstaviti sa LMI.